

EINFACH ZUSAMMENHÄNGENDE POINCARÉ - KOMPLEXE

DER DIMENSION 5

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der Naturwissenschaftlichen Fakultät der

Johann Wolfgang Goethe - Universität

zu Frankfurt am Main

vorgelegt von

Ulrich Hanusch

aus Mährisch - Schönberg

Frankfurt am Main

1971

Mit Genehmigung der Fakultät zum Druck gekürzt. Ein Exemplar der ungekürzten Arbeit liegt in der Senckenbergischen Bibliothek der Universität vor.



Dekan : Professor Dr. H. Oelschläger

Erster Berichterstatter : Professor Dr. W. Franz

Zweiter Berichterstatter : Dozent Dr. G. Burde

Tag der mündlichen Prüfung : 5. Februar 1971

P heißt einfach zusammenhängender Poincaré - Komplex, wenn P ein zusammenhängender, endlicher Zellkomplex mit trivialer Fundamentalgruppe ist, zu dem ein ganzzahliges n existiert und eine Homologieklassse $[P] \in H_n(P)$, so daß das cap - Produkt

$$([P] \cap \cdot) : H^r(P) \longrightarrow H_{n-r}(P)$$

für alle r ein Isomorphismus ist. $[P]$ heißt "Fundamentalklasse" von P und n die "formale Dimension". Die formale Dimension muß nicht mit der geometrischen Dimension des Komplexes übereinstimmen, es gibt aber zu jedem P der formalen Dimension $n \geq 3$ einen n - dimensionalen Komplex gleichen Homotopietyps. Wir betrachten P mit einer festen Orientierung, die durch die Wahl der Fundamentalklasse $[P]$ in $H_n(P) \approx Z_\infty$ bestimmt ist. (Z_q = zyklische Gruppe der Ordnung q für $2 \leq q < \infty$). Mit $-P$ bezeichnen wir den durch $-[P]$ orientierten Komplex, und wir definieren: P, P' sind vom gleichen orientierten Homotopietyp

$P \simeq P' \iff$ Es gibt eine Homotopieäquivalenz $f : P \longrightarrow P'$,
so daß für den induzierten Homomorphismus $f_* :$
 $H_n(P) \longrightarrow H_n(P')$ gilt: $f_*[P] = [P']$.

Wir sagen: P hat "Normalform", wenn die formale Dimension von P gleich der geometrischen ist, und P in den Dimensionen $1, n-1$ keine Zellen, und folglich in den Dimensionen $0, n$ jeweils genau eine Zelle besitzt. In diesem Fall entsteht $P = X \cup_g e^n$ aus seinem $(n-2)$ - Gerüst $P^{n-2} = X$ durch Ankleben einer n - Zelle e^n mit einer Klebeabbildung $g : S^{n-1} \longrightarrow X$. Da sich der orientierte Homotopietyp von P nicht ändert, wenn wir g durch

eine homotope Abbildung g' ersetzen, schreiben wir auch $P = X \cup_{\alpha} e^n$, wobei $\alpha = [g] \in \pi_{n-1}(X)$ die Homotopieklasse von g in der $(n-1)$ -ten Homotopiegruppe von X ist. Nach Ergebnissen von Wall können wir jeden Homotopietyp einfach zusammenhängender Poincaré - Komplexe durch einen solchen Komplex repräsentieren. Ist $P = X \cup_{\alpha} e^n$ in Normalform, so bestimmt α die Fundamental-klasse $[P]$ und damit die Orientierung von P , wenn $2\alpha \neq 0$ ist, denn es gilt :

$$[P] \in H_n(P) \xrightarrow[\cong]{j_*} H_n(P, X) \xleftarrow[\cong]{h} \pi_n(P, X) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(X)$$

mit $\partial h^{-1} j_* [P] = \alpha$ (wobei j_* inklusionsinduziert ist, h den Hurewicz - Homomorphismus und ∂ den Randoperator bezeichnet.) Für $2\alpha = 0$ in $\pi_{n-1}(X)$ gilt aber $P \simeq -P$. Zwischen Poincaré - Komplexen $P' = X' \cup_{\alpha'} e'^n$, $P'' = X'' \cup_{\alpha''} e''^n$ von Normalform ($n \geq 3$) kann man die folgende Summenbildung definieren, die der zusammenhängenden Summe von Mannigfaltigkeiten entspricht :

$$P' \# P'' = (X' \vee X'') \cup_{\alpha' + \alpha''} e^n$$

wobei $[P' \# P'']$ durch $\alpha' + \alpha'' \in \pi_{n-1}(X' \vee X'')$ bestimmt sei. Der orientierte Homotopietyp von $P' \# P''$ ist eindeutig bestimmt durch die orientierten Homotopietypen von P' und P'' . Wir sagen : "P zerfällt", genau dann, wenn es Poincaré - Komplexe $P', P'' \neq S^n$ gibt, so daß $P \simeq P' \# P''$ gilt, und wir nennen P einen "Primkomplex", wenn P nicht zerfällt. Mit diesen Definitionen können wir nun die wichtigsten Ergebnisse der vorliegenden Arbeit formulieren :

Satz A : Ist P einfach zusammenhängender Poincaré - Komplex der Dimension 5 , so gilt :

$$P \simeq P_F \# P_E$$

mit $H_2(P_F)$ frei und $H_2(P_E)$ endlich.

Satz B : Ist P einfach zusammenhängender Poincaré - Komplex der Dimension 5 und $H_2(P)$ frei, so zerfällt P in Primkomplexe mit $H_2 = Z_\infty$. Genauer gilt : Ist $H_2(P) = Z_\infty \oplus \dots \oplus Z_\infty$ (t Summanden), so tritt genau einer der folgenden vier Fälle ein (rechts stehen jeweils t Summanden) :

$$(1) \quad P \simeq P_1 \# P_1 \# \dots \# P_1$$

$$(2) \quad P \simeq P_2 \# P_1 \# \dots \# P_1$$

$$(3) \quad P \simeq P_3 \# P_1 \# \dots \# P_1$$

$$(4) \quad P \simeq P_2 \# P_3 \# P_1 \# \dots \# P_1$$

wobei P_i Primkomplex mit $H_2(P_i) = Z_\infty$ für $i = 1, 2, 3$

und der Fall (4) tritt für $t = 1$ nicht auf. Es gilt

$$P_2 \# P_2 \simeq P_2 \# P_1 \quad \text{und} \quad P_3 \# P_3 \simeq P_3 \# P_1.$$

Im Fall (1) ist $P \simeq (S^2 \times S^3) \# \dots \# (S^2 \times S^3)$,

im Fall (2) ist $P \simeq \mathcal{B} \# (S^2 \times S^3) \# \dots \# (S^2 \times S^3)$

(und folglich $P_1 \simeq S^2 \times S^3$, $P_2 \simeq \mathcal{B}$) mit $\mathcal{B} =$

nichttriviales S^3 - Bündel über S^2 , und in den Fäl-

len (3), (4) ist P nicht vom Homotopietyp einer dif-

ferenzierbaren Mannigfaltigkeit. (Bei den Mannigfal-

tigkeiten $\mathcal{B}$, $(S^2 \times S^3)$ bezeichne $\#$ die zusammen-

hängende Summe.)

Satz C : Ist P einfach zusammenhängender Poincaré - Komplex der Dimension 5 und $0 \neq H_2(P)$ endlich, so zerfällt P in Primkomplexe mit $H_2 = Z_k \oplus Z_k$ bzw. $H_2 = Z_2$. (Für $H_2(P) = 0$ ist $P \simeq S^5$) Genauer gilt, wobei nicht alle Summanden auftreten müssen :

$$P \simeq Q_{k_1} \# \dots \# Q_{k_s} \# R_{n_1} \# \dots \# R_{n_r} \# R$$

Q_k ($k \geq 2$) ist ein Primkomplex mit $H_2 = Z_k \oplus Z_k$ und vom Homotopietyp der Mannigfaltigkeit M_k in [2].

R_n ($n \geq 1$) ist ein Primkomplex mit $H_2 = Z_{2^n} \oplus Z_{2^n}$, aber nicht vom Homotopietyp einer Mannigfaltigkeit.

R - mit $R \not\cong Q_k$, $R \not\cong R_n$ für alle k, n - steht für einen der drei Komplexe W , U_n , V_n ($n \geq 1$).

W ist ein Primkomplex mit $H_2 = Z_2$ und vom Homotopietyp der Mannigfaltigkeit X_{-1} in [2].

U_n , V_n haben $H_2 = Z_{2^n} \oplus Z_{2^n}$ und U_n ist vom Homotopietyp der Mannigfaltigkeit X_n in [2].

V_n ist nicht vom Homotopietyp einer Mannigfaltigkeit, falls $V_n \not\cong U_n$ gilt.

U_n ist Primkomplex für $n > 1$, $U_1 \simeq W \# W$.

Daraus folgt unter anderem : Enthält $H_2(P)$ nur Elemente ungerader Ordnung, so ist P vom Homotopietyp einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Andererseits erhalten wir aus obigen Sätzen unendlich viele Beispiele von Poincaré - Komplexen, die nicht vom Homotopietyp einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit sind.

Lebenslauf

Am 6. 5. 1945 wurde ich in Mährisch - Schönberg als Sohn des Ingenieurs Herbert Hanusch und seiner Ehefrau Ursula , geb. Scholz, geboren. Nach der Flucht wohnten wir zunächst in Schiffelborn im Kreis Fritzlar, und ich besuchte die erste Volksschulklasse in Oberurff von Frühjahr bis Herbst 1951 . Aus beruflichen Gründen meines Vaters zogen wir dann nach Giessen an der Lahn und später nach Mühlheim am Main, so daß ich 1951 - 1954 die Volksschule in Giessen und 1954 - 1955 die Volksschule in Mühlheim besuchte. Anschließend ging ich in das Leibnizgymnasium in Offenbach, wo ich nach neun Jahren im Frühjahr 1964 die Abiturprüfung bestand. Seit 1964 studiere ich Mathematik an der Johann Wolfgang Goethe - Universität in Frankfurt am Main. Im Mai 1966 bestand ich die Diplom - Vorprüfung und im Oktober 1968 die Diplom - Hauptprüfung für Mathematiker. Von Dezember 1966 bis März 1970 war ich als wissenschaftliche Hilfskraft bei Herrn Professor Dr. Franz im Institut für Reine Mathematik tätig, wo ich seit März 1970 als Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle angestellt bin.

Meine akademischen Lehrer waren : Bauer, Behrens, Benz, Dänzer, Dinges, Franz, Gleissberg, Haase, Lohmann, Martienssen, Moufang, Mrowka, Sauer, Stummel.

